## Exercice n° 22 $z^2-(1+i)z+i=0$

On a : a + b + c = 0 donc z' = 1 et $z'' = \frac{c}{a} = i$

$S_c=\{1 ; i\}$

$E_\theta : z^2 - (2e^{i\theta}\cos\theta)z + e^{2i\theta} = 0$

a) Remplaçant z par 1 dans l'équation $(E_\theta)$:

$1 - 2e^{i\theta}\cos\theta + e^{2i\theta} = 1 - 2e^{i\theta}(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}) + e^{2i\theta}$

$= 1 - \underbrace{e^{i\theta}.e^{i\theta}}_{e^{2i\theta}} - \underbrace{e^{i\theta}e^{-i\theta}}_{1} + e^{2i\theta} = 0$

D'où 1 est une racine de $(E_\theta)$

b) On sait que si z' et z" sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ alors $z'.z'' = \frac{c}{a}$

Donc : $1x.z'' = \frac{e^{2i\theta}}{1} \Longrightarrow \boxed{z'' = e^{2i\theta}}$

a) $z_B = e^{2i\theta} \Leftrightarrow |z_B| = |e^{2i\theta}| = 1$ et $2\theta \in ]0, \pi[$

Donc OB = 1 par suite l'ensemble des points B est le demi Cercle trigonométrique privé des points A et $S_O(A)$ situés dans le demi plan $y \geq 0$

b) OACB est un losange si et seulement si OACB est un parallélogramme car OA = OB

On aura dans ce cas : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_A = z_C - z_B$

$\Leftrightarrow z_C = z_A + z_B \Leftrightarrow \boxed{z_C = 1 + e^{2i\theta}}$

c) l'aire du losange OACB est égal à $\mathcal{A} = \frac{OC.AB}{2}$

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow OC.AB = 1 \Leftrightarrow |z_C|.|z_B - z_C| = 1$

$\Leftrightarrow |(1+e^{2i\theta}).(e^{2i\theta}-1)| = |e^{4i\theta}-1| = 1$

$\Leftrightarrow |e^{2i\theta}.(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})| = \underbrace{|e^{2i\theta}|}_{1}.|2i\sin 2\theta| = 1$

$\Leftrightarrow |2\sin 2\theta| = 1$ et $2\theta \in ]0, \pi[$

Donc $2\sin 2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow$

$\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ et Comme $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ on trouve :

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{12} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{12}}$$

## Exercice n° 23

a) $z^2-2iz-2=0$

$\Delta' = i^2 + 2 = -1 + 2 = 1$ Donc $\delta = 1$

Par suite $z' = 1+i$ ; $z'' = -1+i$ $S_c=\{1+i ; -1+i\}$

b) $z' = 1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$z'' = -1+i = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$\theta \in ]0, \pi[$

$(E) : z^2 - 2e^{i\theta}.z + e^{2i\theta} - 1 = 0$

$\Delta' = (e^{i\theta})^2 - (e^{2i\theta} - 1) = e^{2i\theta} - e^{2i\theta} + 1 = 1$ Donc $\delta = 1$

Les solutions donc sont : $z' = 1 + e^{i\theta}$ ; $z'' = -1 + e^{i\theta}$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1 + e^{i\theta}, -1 + e^{i\theta}\}$$

or on a : $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ d'où

$$\boxed{z_2 = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

$z_3 = -1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e$

or on a : $\sin\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ d'où

$$\boxed{z_3 = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}}$$

b) On a : $\frac{z_B + z_C}{2} = e^{i\theta} = \frac{z_O + z_A}{2}$ d'où les segments [BC] et [OA] ont même milieu ce qui prouve que OBAC est un parallélogramme

$OA = |z_1| = 2$

$BC = |z_C - z_B| = |-1 + e^{i\theta} - 1 - e^{i\theta}| = |-2| = 2$

OA = BC donc les diagonales du parallélogramme OBAC sont isométriques d'où c'est un rectangle

c) OBAC est un carré si et seulement si : OB =OC

$\Leftrightarrow |z_B| = |z_C| \Leftrightarrow 2\sin\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow tg\frac{\theta}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Puisque $\theta \in ]0, \pi[$ on trouve $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Qarray.tn -Aqra Bled- Qarray.tn